

Tentamen Calculus 2

9 april 2009, 9.00-12.00 uur.

Per opgave zijn maximaal 1,5 punten te behalen. Totaal: 9 + 1 (gratis) punten. De detailnormering staat onderaan het tentamen. Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Echter, antwoorden die uitsluitend m.b.v. de (grafische) rekenmachine verkregen zijn, worden niet goed gerekend: Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Succes!

1. We beschouwen de alternerende reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$$

waarbij $b_n \geq 0$ voor alle $n = 1, 2, 3, \dots$. Deze reeks convergeert indien (i) $b_{n+1} \leq b_n$ (voor alle n) en (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

- (a) Geef (zonder bewijs) een divergente alternerende reeks die wel aan voorwaarde (i) voldoet, maar niet aan voorwaarde (ii) voldoet.
- (b) De N-de partiële som duiden we aan door $s_N = \sum_{n=1}^N (-1)^n b_n$. Laat zien dat uit voorwaarde (i) volgt dat

$$0 \leq s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \dots \leq s_{2N} \leq \dots$$

- (c) Geef (zonder bewijs) een convergente alternerende reeks die niet absoluut convergent is.

2. Gegeven is de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2n+3}$$

- (a) De bovenstaande machtreeks is convergent voor alle x die voldoen aan $|x-1| < R$. Bereken de convergentiestraal R .
- (b) Is de reeks convergent voor $x-1 = R$?
- (c) Onderzoek de convergentie indien $x-1 = -R$.

Z.O.Z.

3. De functie f wordt gegeven door

$$f(x, y) = \frac{xy^n}{x^2 + y^2}$$

waarbij $(x, y) \neq (0, 0)$.

(a) Neem $n = 1$ en toon aan dat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

niet bestaat.

(b) Neem $n = 2$ en bewijs (m.b.v. de definitie) dat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

(c) Bereken de partiële afgeleiden f_x en f_{xx} (voor $(x, y) \neq (0, 0)$).

4. We beschouwen de integraal

$$\int \int_R \frac{y}{x} dA$$

waarbij het (twee-dimensionale) gebied R begrensd wordt door de x -as, de lijn $y = x$ en de kromme $x^2 + 4y^2 = 4$.

(a) Schets het gebied R in het xy -vlak.

(b) We willen de integraal bepalen door de variabelen x, y te vervangen door u, v waarbij $u = x^2 + 4y^2$ en $v = y/x$. Bepaal de Jacobiaan van deze coördinaat-transformatie.

(c) Bereken de integraal.

5. (a) Bereken de algemene oplossing $y(x)$ van

$$y'' + 4y = 0$$

(b) Idem,

$$y'' + 4y = xe^x$$

(c) Bepaal voor alle (reële) waarden van λ een particuliere oplossing van

$$y'' + 4y = \sin(\lambda x)$$

6. De 2π -periodieke (zaagtand-)functie $f(t)$ wordt gegeven door $f(t) = \pi - |t|$ voor $t \in [-\pi, \pi]$.

(a) Toon aan dat de Fourierreeks van $f(t)$ gegeven wordt door

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \cos((2k-1)t)$$

(b) Bereken, m.b.v. onderdeel (a),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Detailnormering:

1a	0.5	2a	0.6	3a	0.5	4a	0.2	5a	0.4	6a	1.3
b	0.5	b	0.5	b	0.6	b	0.6	b	0.5	b	0.2
c	0.5	c	0.4	c	0.4	c	0.7	c	0.6		

rekenfout = -0.1 punt